Musterlösung

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik (BSc D-ITET)

1. **a)** Es muss gelten

$$1 = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \frac{1}{2} + c\frac{1}{r-1},$$

also $c = \frac{r-1}{2}$.

Zum zweiten Teil: Es gilt $P[X = 1] = F(1) - F(1^-) = 0$.

b) Da F_X in 0 und 1 stetig ist mit $F_X(0) = 0$ und $F_X(1) = \frac{1}{2}$, besitzt X die Dichte

$$f_X(x) = F_X'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ \frac{r-1}{2}\frac{1}{x^r} & (x \geq 1). \end{cases}$$

Es gilt für $x > 1$

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + c\frac{1}{r-1}(1 - x^{1-r}) = 1 - \frac{1}{2}x^{1-r}.$$

Die Verteilungsfunktion von $Y = \log X$ ist daher für $y \in \mathbb{R}$

$$F_Y(y) = P[\log X \leq y] = P[X \leq e^y] = F_X(e^y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{2y} & (y < 0) \\ 1 - \frac{1}{2}e^{y(1-r)} & (y \geq 0) \end{cases}$$

und die Dichte von Y ist

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} e^{2y} & (y < 0) \\ \frac{r-1}{2}e^{y(1-r)} & (y \geq 0). \end{cases}$$

2. **a)** Sei $p_S(p)$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Dann:

$$\begin{aligned} p_S(p) &= p \cdot \frac{4}{7} + 2p \cdot \frac{3}{8} + (1 - 3p) \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{13}{14} \cdot p. \end{aligned}$$

b) Sei $\mathcal{C}$ das Ereignis „Die Urne C wird gewählt“ und $\mathcal{W}$ das Ereignis „Die gezogene Kugel ist weiss“. Dann kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit geschrieben werden als $P(\mathcal{C}|\mathcal{W})$. Deshalb haben wir:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}|\mathcal{W}) &= \frac{P(\mathcal{W}|\mathcal{C})P(\mathcal{C})}{P(\mathcal{W})} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \cdot (1 - 3p)}{1 - p_S(p)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot p}{\frac{1}{2} + \frac{13}{7} \cdot p}. \end{aligned}$$